

Vorwort

Leitideen in Mathematik

❶ Zahl

Dazu gehören alle Rechenarten in allen Zahlenbereichen. Es müssen Rechenverfahren angewendet werden.

❷ Messen

Dazu gehört der Umgang mit verschiedenen Maßeinheiten und Größenbereichen.

❸ Raum und Form

Dazu gehört die Verwendung der gängigen geometrischen Begriffe und Formen in Bezug auf Flächen und Körper.

❹ Funktionaler Zusammenhang

Dazu gehört der Umgang mit grafischen Darstellungen, dem Koordinatensystem sowie den Grundlagen des Prozentrechnens.

❺ Modellieren

Bereiche oder Situationen, die modelliert werden sollen, muss man in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen. Die Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation müssen dann interpretiert und geprüft werden.

Dabei sollen mathematische Darstellungen verwendet werden (Variable, Terme, Gleichungen, Funktionen, Diagramme, Tabellen).

❻ Daten und Zufall

Dazu gehören der sinnvolle Umgang mit Daten, der Verwendung des Mittelwertes und die geordnete Darstellung von ermittelten Daten und anderen Lösungen.

Allgemeine mathematische Kompetenzen

❶ Mathematisches Argumentieren und Verbalisieren

❷ Mathematisches Lösen von Problemen

❸ Mathematisches Modellieren

Modellierungsaufgaben sind offene, komplexe und realitätsbezogene Aufgaben, zu deren Lösung ein Modellierungsprozess durchlaufen werden muss. Dazu sind folgende Schritte nötig:

- ① Verstehen von Text und Situation
- ② Aufstellen eines Realmodells
- ③ Aufstellen eines mathematischen Modells
- ④ Finden einer Lösung innerhalb des mathematischen Modells
- ⑤ Interpretation der Lösung
- ⑥ Lösung

Modellierungskompetenzen umfassen die zum Durchlaufen des Modellierungsprozesses nötigen Teilkompetenzen: Kompetenzen im Argumentieren, Kompetenzen über das Modellieren auf einer Metaebene nachzudenken sowie die Fähigkeit, die Möglichkeiten der Mathematik zum Lösen von realen Problemen zu sehen. Die Bearbeitung von Textaufgaben, die von den üblichen Textaufgaben dadurch abweichen, dass sie weniger oder mehr Angaben als nötig beinhalten, können erste Schritte auf dem Weg zum Erwerb von Modellierungskompetenzen darstellen. Diese Aufgaben werden im Folgenden als unterbestimmt bzw. überbestimmt bezeichnet.

❹ Verwendung von mathematischen Darstellungen

❺ Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik

❻ Kommunikation

Bildungsstandards und offene Aufgaben

In den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss und für den Hauptschulabschluss wird gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler bestimmte „allgemeine mathematische Kompetenzen“ erwerben. In der konkreten unterrichtlichen Umsetzung haben sich „offene Aufgaben“, verbunden mit entsprechenden Unterrichtsmethoden, als geeignete Instrumente zur Realisierung dieser Ziele erwiesen.⁴

Es hat sich aber gezeigt, dass offene Aufgaben, für deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler zwei oder mehr Unterrichtsstunden benötigen (z. B. Projektaufgaben) aus Zeitgründen nur ab und zu im Unterricht eingesetzt werden können - nach Meinung der Lehrkräfte: viel zu selten.

Ein nachhaltiger Erfolg beim Erwerb von allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird sich nur dann einstellen, wenn öfter und regelmäßig offene Aufgaben in den laufenden Unterricht integriert werden. Deshalb sollten Aufgaben bevorzugt werden, deren Bearbeitungszeit 15 bis 20 Minuten nicht übersteigen, die aber dennoch wesentliche Merkmale offener Aufgaben besitzen.

Merkmale offener Aufgaben

- ① Die Aufgabenstellung enthält keine kleinschrittigen Fragen. Ausgangspunkt ist die Beschreibung einer Problemsituation.
- ② Die Aufgabe dient nicht dem kurzatmigen Einüben eines gerade behandelten Stoffs.
- ③ Die Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Sie lässt sich nicht eindeutig einem bestimmten trainierten Schema zuordnen.
- ④ Die Aufgabe fordert die Schülerinnen und Schüler heraus, einen Lösungsweg selbst zu überlegen.
- ⑤ Es gibt nicht nur eine richtige Lösung. Die Aufgabenstellung lässt unterschiedliche Lösungen zu.
- ⑥ Es ergibt sich die Notwendigkeit von Begründungen.
- ⑦ Es ergibt sich die Notwendigkeit, die Bearbeitung der Aufgabe und die Lösung zu dokumentieren und für andere verständlich zu präsentieren.

Nicht alle der hier aufgeführten Kriterien müssen bei einer Aufgabe erfüllt sein, damit sie als „offene Aufgabe“ anerkannt werden kann.

Aufgabenbereiche

1. Bereich: Informationen aus Bildern

Damit sollen Schwierigkeiten des Textlesens und Textverständnisses gemindert werden. Informationen werden statt aus Texten aus Bildergeschichten bzw. Bildcollagen entnommen. Wichtig ist bei diesem Aufgabentyp, dass sich aus dem Bild bzw. aus den aufeinander bezogenen Bildern eine Aufgabe ergibt, die Merkmale von offenen Aufgaben trägt.

Zur Schulung der Sprachkompetenz sollen die Schülerinnen und Schüler angehalten werden, den Inhalt der Bildergeschichte in Worte zu fassen, ihren Lösungsweg zu beschreiben und ihr Ergebnis zu begründen.

2. Bereich: Informationen aus bildunterstützten Texten

Bei Aufgaben dieses Bereichs wird ein Teil der zur Bearbeitung der Aufgabe notwendigen Informationen durch Text vermittelt, ein anderer Teil durch Bilder. Die Bilder übermitteln Informationen. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe lässt sich verändern, indem weitere Textteile durch Bilder ersetzt werden oder umgekehrt. Dabei muss Wert darauf gelegt werden, dass die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg beschreiben und ihr Ergebnis erklären und begründen.

3. Bereich: Vorgegebene Texte und Rechenaufgaben einander zuordnen

Die Texte der Aufgaben in diesem Bereich sind kurz und leicht zu verstehen, die vorgegebenen Rechenaufgaben einfach. Die Texte enthalten die gleichen Zahlen wie die Rechenaufgabe. Die Schülerinnen und Schüler sollen herausfinden und begründen, welcher Text zu welcher Aufgabe passt. Es kann auch sein, dass mehr als einer der vorgegebenen Texte zu einer Aufgabe passt. Auf welchem Weg die richtigen Zuordnungen gefunden werden, ist offen.

4. Bereich: Zu einer Rechenaufgabe einen passenden Text erfinden

In diesem Bereich sollen Texte selbst formuliert werden. Bei den Leistungsschwächsten könnte man sich damit begnügen, wenn sie – ohne Kontextbezug – die Rechenschritte nur beschreiben. Je mehr Grundrechenarten in der vorgegebenen Aufgabe auftreten, desto schwieriger wird es, einen passenden Text zu formulieren.

Durch diese Art von Aufgaben wird nicht nur die Sprachkompetenz verbessert, vielmehr regen die Aufgaben auch die Kreativität an.

5. Bereich: Zu einem Text Fragen formulieren, die zu einer Rechenaufgabe führen

In diesem Bereich wird der Sachverhalt vorgegeben. Allerdings beschränkt sich der Text auf die Beschreibung des Sachverhalts, es werden keine Fragen gestellt. Es soll überlegt werden, was interessieren könnte und welche Frage(n) formuliert werden könnte(n). Durch die Frage(n) wird der Text zur Aufgabe, die natürlich auch rechnerisch gelöst werden soll.

Sachbezogenes Rechnen /Aufgabenkultur

Das sachbezogene Rechnen stellt einen Schwerpunkt im Mathematikunterricht dar. Es wird in allen Jahrgangsstufen und allen Themenbereichen angewandt.

Angestrebt wird, die Problemlösefähigkeit der Schüler zu fördern. Durch individuelles Herangehen an Sachaufgaben sollen die Schüler verschiedene Fragen stellen und mögliche Lösungswege aufzeigen. Dabei ist es nicht nur erlaubt, sondern sogar erwünscht, dass verschiedene Lösungsmöglichkeiten gefunden und angewendet werden. So ist es zum Beispiel beim Prozentrechnen möglich, Aufgaben mit dem Dreisatz, mit der Formel, dem Operatormodell oder anderen Verfahren zu lösen. Alle diese Methoden sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Beim Lösen von Sachaufgaben ist es wichtig, den Schülern Strategien wie das Erschließen von Bildmaterial, das anschauliche und gründliche Erfassen von Aufgabentexten und eine übersichtliche, für die Aufgabenart günstige Darstellungsweise, an die Hand zu geben.

Durch diese Variabilität bei Fragestellung und Lösung von Aufgaben können die Schüler weg vom „Schubladendenken“ hin zum vernetzten Denken geführt werden. Sie sollten lernen, jede Aufgabe auf ihre verschiedenen mathematischen Inhalte hin zu untersuchen.

Um diese Ziele erreichen zu können, sind bei der Auswahl der Aufgaben einige Überlegungen zu bedenken:

- ❶ Aufgaben sollten **produktiv** sein, d.h. es sind verschiedene mathematische Probleme enthalten und variable Fragestellungen möglich.
- ❷ Aufgaben sollten immer **aus dem Erfahrungsbereich** der Schüler kommen.
- ❸ Aufgaben sollten **reale Probleme** beinhalten. So kann es sicher sinnvoll sein, eine Preiskalkulation vom Einkaufspreis zum Endpreis durchzuführen. Der umgekehrte Weg macht jedoch weniger Sinn. So wird im Lehrplan z. B. beim Zinsrechnen nur noch das Berechnen der Zinsen verlangt. Aufgaben, bei denen Kapital oder Zeit berechnet werden müssen, sind nicht realitätsnah.
- ❹ Aufgaben sollten **nicht zu textlastig** sein. Schüler, die sprachliche Probleme haben, dürfen nicht durch die Länge des Textes einer Aufgabe erschreckt und entmutigt werden. Im Vordergrund muss beim Mathematikunterricht das Lösen mathematischer Probleme und nicht die Prüfung sinnerfassenden Lesens stehen. Andere Präsentationsformen einer Sachsituation (Tabellen, Fahrpläne, Schaubilder, Preislisten) können zusätzlich zur Textform genutzt werden.

Raumvorstellung/Kopfgeometrie

Die Ergebnisse beim Lösen von Geometrieaufgaben zeigen immer wieder, dass die Kenntnis von Formeln zum Rechnen an Flächen und Körpern nicht ausreicht, um Schüler zum sicheren Umgang mit geometrischen Problemen zu befähigen. Vorstellungsvermögen in Fläche und Raum muss geschult werden. Dazu bedarf es der Arbeit an konkreten Modellen, soweit möglich der zeichnerischen Darstellung und vielfältiger kopfgeometrischer Übungen. Nur durch häufiges Schulen der Vorstellungskraft mit durchaus spielerischen Aufgaben, die wie beim Kopfrechnen ohne schriftliche Ausarbeitung auskommen, ist das Verstehen von Geometrieaufgaben mit komplexerem Anforderungsniveau möglich.

Oftmals ist nicht der Einsatz der richtigen Formel aus der Formelsammlung das Problem der Schüler, sondern das Durchdringen der geometrischen Figur, deren Verständnis und das daraus erst mögliche Herausfinden der brauchbaren Formeln. Deshalb müssen die Schüler befähigt werden, sich das in der Aufgabe beschriebene geometrische Gebilde vorstellen zu können. Sie müssen die unterschiedlichen Flächen und Körper beschreiben können und begriffliche Vorstellungen zu Oberfläche und Volumen gewinnen. So wird dann auch das Berechnen von zusammengesetzten Flächen und Körpern nach vom Schüler ausgewählten Verfahren gelingen können.

Kopfrechnen/Rechnen mit Notizen

Nur wer rechnen kann, findet auch Lösungen für mathematische Probleme. Dabei spielt die Art der Lösungsstrategie eine untergeordnete Rolle. Was mathematisch richtig ist und schnell und sicher zum Ergebnis führt, ist ein guter Lösungsweg. An die Stelle der Vermittlung schematisierter und automatisierter Verfahrensschritte und Notationsmuster tritt zur Förderung der Rechenfähigkeit das selbstständige Suchen individueller Lösungsstrategien. Im Bereich der Grundrechenarten rechnen die Schüler bei einfachen Zahlen im Kopf oder mit Hilfe von Notizen nach selbst gefundenen Wegen, die sie begründen können. Rechengeräte helfen beim Ausrechnen der gefundenen Lösungsansätze bei komplexeren Aufgaben und verringern die Abhängigkeit von schriftlichen Normalverfahren zur Lösungsfindung. Zur Überprüfung der Plausibilität der Ergebnisse ist überschlägiges Rechnen im Kopf oder gegebenenfalls mit Hilfe von Notizen nötig. Kopfrechnen muss also Prinzip werden, einerseits zum Lösen einfacher mathematischer Alltagsprobleme, andererseits zur Absicherung der mit Hilfe von Rechengeräten ermittelten Ergebnisse.

Dezimalbrüche

Beim Rechnen im Bereich der rationalen Zahlen ist aus Gründen der Lebensnähe den Dezimalbrüchen mehr Bedeutung beizumessen als den gewöhnlichen Brüchen. Hier beschränkt sich das Rechnen auf Brüche mit gebräuchlichen Nennern. Der Umgang mit realitätsfremden Nennern und das formale Rechnen mit gemischten Zahlen wird ebenso vermieden wie das Dividieren durch Bruchzahlen. Die Division von Bruchzahlen sollte sich auf das Teilen durch natürliche Zahlen beschränken. Die Schüler erfassen die Vorzüge der Schreibweise mit Dezimalstellen, besonders bei der Verwendung als Maßzahlen. Beim Rechnen im Bereich der rationalen Zahlen haben die Schüler bei der Dezimalbruchschreibweise eine schnellere Größenauffassung des Zahlenwertes und können überschlägig auch im Kopf Ergebnisse ermitteln.

Verknüpfung mathematischen Wissens

Zur Steigerung der Sicherheit im Anwenden einzelner mathematischer Lösungsverfahren muss der Mathematikunterricht erreichen, Zusammenhänge vermeintlich eigenständiger Aufgabenbereiche offen zu legen. Schüler, die den Bruch als Division verstehen, erkennen z. B. leichter den Zusammenhang zwischen Hundertstelbruch, Prozentsatz und Dezimalbruch. Die Verknüpfung mathematischen Wissens befähigt den Schüler erst zum souveränen Umgang mit gelernten Verfahren. Mathematikunterricht darf die unterschiedlichen Inhalte nicht in einzelne Schublade stecken, die beim Schüler nur durch ganz bestimmte Signalbegriffe wieder abrufbar sind. Vielmehr muss der Zusammenhang der Inhalte und des damit verbundenen Wissens aufgezeigt werden.

Verschiedene Rechenwege

Der Mathematikunterricht räumt der Entwicklung von Lösungsideen, die selbstständig und in Zusammenarbeit mit anderen Schülern erarbeitet werden, Platz ein. Der Unterricht muss sich offen für die verschiedenen Lösungswege der Schüler zeigen. Nicht ein bestimmter Weg zur Lösungsfindung ist entscheidend, sondern anzustreben ist die Fähigkeit der Schüler mathematisierbare Probleme des Alltagslebens, der Arbeits- und Berufswelt sowie weiterer Bildungsgänge lösen zu können. Hierzu ist ein breites Repertoire an Lösungsstrategien nötig, das individuell, mathematisch richtig und zielgerichtet einsetzbar ist. Der Mathematikunterricht gibt den Schülern sicherlich Hilfestellungen beim Herausfinden der jeweils günstigsten Rechenwege, die zielorientiert und ohne Umstand zum Ergebnis führen, er lässt aber grundsätzlich die Vielfalt möglicher Rechenwege zu.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Neue und offene Aufgabenformen	
❶ Mathematisch argumentieren	7
❷ Mathematisch darstellen und modellieren:	31
Tabellen/Zeichnungen/Statistiken/Skizzen/Konstruktionen	
❸ Mathematisch rückwärts denken und rechnen	59
❹ Mathematisch ergänzen und streichen (über- und unterbestimmte Aufgaben)	67
❺ Mathematische Probleme lösen:	71
Logikaufgaben/mehrere Lösungswege finden/Tangram	
❻ „Mathematische Diktate“	97
Neue Formen der Testaufgaben	
Test 1	99
Test 2	101
Test 3	103

MAT

Name: _____

Datum: _____

Mathematisch argumentieren**Sparsam Autofahren**

① Frau Hertle betrachtet ihre Tankanzeige vor und nach ihrer Fahrt. Ein Liter Superbenzin kostete zur Zeit ihrer Reise 1,35 €. Sie verbrauchte im Durchschnitt 9 Liter pro 100 km bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h hätte Frau Hertle 1 Liter pro 100 km sparen können.

Frau Hertle stellt sich einige Fragen, nimmt einen Stift zur Hand und rechnet.

Fragen:



Rechnung:



② Herr Müller füllt seinen Tank, der 80 Liter fasst, vor Antritt der Fahrt voll. Herr Müller tankt Normalbenzin, das zur Zeit seiner Fahrt 1,30 € kostet. Er verbraucht im Durchschnitt 10 Liter pro 100 km.

Fragen:



Rechnung:

Mathematisch argumentieren

Sparsam Autofahren

① Frau Hertle betrachtet ihre Tankanzeige vor und nach ihrer Fahrt. Ein Liter Superbenzin kostete zur Zeit ihrer Reise 1,35 €. Sie verbrauchte im Durchschnitt 9 Liter pro 100 km bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h hätte Frau Hertle 1 Liter pro 100 km sparen können.

Frau Hertle stellt sich einige Fragen, nimmt einen Stift zur Hand und rechnet.

Fragen:

Wie viel Benzin habe ich verbraucht? Wie teuer war das Benzin?

Wie viele Kilometer bin ich gefahren?

Was hätte ich insgesamt sparen können, wenn ich etwas langsamer gefahren wäre?

Rechnung:

Tankanzeige zu Beginn der Fahrt: 55 Liter

Tankanzeige am Ende der Fahrt: ca. 10 Liter

Benzinverbrauch: 55 Liter – 10 Liter = 45 Liter

Benzinkosten: 45 Liter · 1,35 € = 60,75 €

Gefahrene Kilometer: 45 Liter : 9 Liter = 5 mal ⇨ 500 km

Ersparnis: 5 Liter ⇨ 5 Liter · 1,35 € = 6,75 €

② Herr Müller füllt seinen Tank, der 80 Liter fasst, vor Antritt der Fahrt voll. Herr Müller tankt Normalbenzin, das zur Zeit seiner Fahrt 1,30 € kostet. Er verbraucht im Durchschnitt 10 Liter pro 100 km.



Fragen:

Wie viel Benzin hat Herr Müller verbraucht? Wie teuer war das Benzin? Tatsächliche Fahrzeugkosten? Welche Strecke hat Herr Müller zurückgelegt? Wäre eine Zugfahrt billiger gekommen?

Rechnung:

Tankanzeige am Ende der Fahrt: Die Hälfte von ein Viertel ist ein Achtel.

Verbleibender Tankinhalt: 80 : 8 = 10 Liter

Benzinverbrauch: 80 Liter – 10 Liter = 70 Liter

Benzinkosten: 70 Liter · 1,30 € = 91 €

Gefahrene Kilometer: 70 Liter : 10 Liter = 7 mal ⇨ 700 km

Effektive Fahrzeugkosten: 700 km · 0,50 € (ca. Kilometerpauschale) = 350 €

⇨ Eine Bahnfahrt 1. Klasse (Hin- und Rückfahrt) im ICE wäre nur knapp 300 € teuer.

